THÉOREME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Préliminaire 1

La proposition "toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure" est un *axiome* qui fonde $\mathbb{R}$.

Préliminaire 2

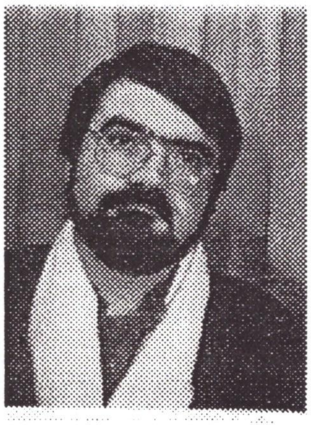
La véritable définition de : $\lim_{x \to x_0} f(x)=l$

est :

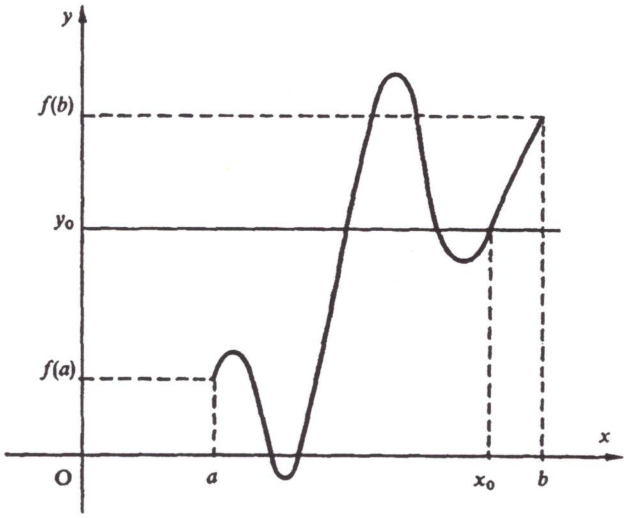
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0 : \left[|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon \right]$$

Il en résulte que la traduction de "f est continue en x_0" est :

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \alpha>0 : \left[|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \right]}$$



Théorème *(théorème des valeurs intermédiaires)*. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout élément y_0 de $[f(a), f(b)]$ ou de $[f(b), f(a)]$ (selon que $f(a) \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant f(a)$), il existe un élément x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.



Démonstration. Supposons $f(a) \leqslant y_0 \leqslant f(b)$. Posons :

$$A = \{ x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant y_0 \}.$$

D'une part $a \in A$ et d'autre part si $x \in A$ alors $x \leqslant b$. Donc A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré; il admet donc une borne supérieure. Posons

$$x_0 = \sup A.$$

De $a \in A$, on déduit $a \leqslant x_0$, et comme b majore A, on a $x_0 \leqslant b$; donc $x_0 \in [a, b]$ et $f(x_0)$ existe. Comme f est continue sur $[a, b]$, f est continue en x_0, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \alpha > 0\ \ \forall x \in [a, b]\ \ (x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha) \Longrightarrow (f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon).$$

Montrons que cela entraîne que $f(x_0) = y_0$ en montrant que les inégalités $f(x_0) > y_0$ et $f(x_0) < y_0$ sont impossibles.

1. Si $f(x_0) > y_0$, choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $y_0 < f(x_0) - \varepsilon$, par exemple $\varepsilon = (f(x_0) - y_0)/2$. De la continuité de f en x_0, il résulte qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b]\quad x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Posons $x_1 = x_0 - \alpha/2$; comme $f(x_0) - \varepsilon > y_0$, on a :

$$\forall x \in [a, b]\quad x \in [x_1, x_0] \Longrightarrow x \notin A,$$

donc si $x \in A$, alors $x < x_1$ ou $x > x_0$. Comme x_0 est un majorant de A, $x > x_0$ est impossible et $x < x_1$. Donc x_1 est un majorant de A strictement inférieur à x_0, ce qui est contraire à la définition de x.

2. Si $f(x_0) < y_0$, choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) + \varepsilon < y_0$, par exemple $\varepsilon = (y_0 - f(x_0))/2$. De la continuité de f en x_0, il résulte qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b]\quad x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Comme $x_0 \leqslant b$ et $f(b) \geqslant y_0 > f(x_0) + \varepsilon$, on a $x_0 + \alpha \leqslant b$. Posons $x_1 = x_0 + \alpha/2$; on a $a \leqslant x_0 < x_1 < x_0 + \alpha \leqslant b$, donc $x_1 \in [a, b]$: $f(x_1)$ existe et vérifie $f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon < y_0$; par suite $x_1 \in A$ et x_0 n'est pas un majorant de A, ce qui est contraire à la définition de x_0. □